

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ 22- 24 mai 2009

Filiera tehnologică: profil servicii, profil resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA a XI-a

I. $AY = \frac{1}{2}(AX + A^2X) = \frac{1}{2}(AX + X) = Y$ 1p

$AZ = \frac{1}{2}(AX - A^2X) = \frac{1}{2}(AX - X) = -Z$ 1p

b) Fie (Y', Z') o altă soluție.

$X = Y + Z = Y' + Z' \Rightarrow Y - Y' = Z' - Z$ 1p

$AY = Y, AY' = Y' \Rightarrow A(Y - Y') = Y - Y'$ 1p

$AZ = -Z, AZ' = -Z' \Rightarrow A(Z - Z') = Z' - Z$ 1p

$A \cdot \begin{cases} Y - Y' = Z' - Z \\ Y - Y' = Z - Z' \end{cases} \Rightarrow Y - Y' = Z - Z'$ 1p

$\begin{cases} Y - Y' = Z' - Z \\ Y - Y' = Z - Z' \end{cases} \Rightarrow Y' = Y; Z' = Z$ 1p

Total 7 puncte

II. a) $(A - 3I_3) \cdot \frac{1}{6}(B - 2I_3) = \frac{1}{6}(AB - 2A - 3B + 6I_3) = \frac{1}{6} \cdot 6I_3 = I_3$ 3p

b) $A = \frac{1}{2}(A - 3I_3) \cdot B \Rightarrow \text{rang } A \leq \min\{\text{rang}(A - 3I_3); \text{rang } B\} = \text{rang } B$ 2p

$B = \frac{1}{3} \cdot A \cdot (B - 2I_3) \Rightarrow \text{rang } B \leq \text{rang } A$ 2p

Total 7 puncte

III. a) $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - ax}{x} = -a; n = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \Rightarrow y = -ax$ asimptotă oblică2p

b) $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \ln a$, deci $A(\ln a, a(1 - \ln a))$ punct de minim2p

c) $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) \geq f(0), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x = 0 \text{ punct de minim} \Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow a = 1$ 2p

$a = 1 \Rightarrow f(x) = e^x - x \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ 1p

Total 7 puncte

IV. $A_\Delta = \frac{1}{2} \bmod \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ b & c & 1 \\ c & a & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$ 2p

$A_\Delta = \frac{3}{2} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 3$ 2p

$\Rightarrow G\left(\frac{a+b+c}{3}, \frac{a+b+c}{3}\right) \equiv G(2, 2) \Rightarrow a+b+c = 6$ 2p

$\{a, b, c\} = \{1, 2, 3\}$ 1p

Total 7 puncte